第15講　2次の面積の計算

15　次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c，d，p，q，α，β は実数の定数とし，$\alpha<\beta$ とする．

(1)　曲線 $C_1: y=2x^2+3x+4$ と直線 $l_1: y=ax+b$ が2点で交わっていて，その x 座標が $x=5$，7 であるとき，C_1 と l_1 で囲まれる部分の面積 S_1 を求めよ．

(2)　曲線 $C_2: y=5x^2+6x+7$ と直線 $l_2: y=cx+d$ が1点で接していて，その x 座標が $x=3$ であるとき，C_2 と l_2，そして直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積 S_2 を求めよ．

(3)　曲線 $C: y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ に対し，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C に2本の接線が引けるとする．その接線を l，m とし，C と l の接点を $\mathrm{Q}(\alpha,\ a\alpha^2+b\alpha+c)$，$C$ と m の接点を $\mathrm{R}(\beta,\ a\beta^2+b\beta+c)$ とする．曲線 C と線分 QR で囲まれる部分の面積 S を a，α，β で表せ．また，C と l と m で囲まれる部分の面積 T を a，α，β で表せ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　2次の面積の計算

15　次の各問いに答えよ.

(1)　放物線 $y=x^2$ の上を動く2点P, Qがあって, この放物線と線分PQが囲む部分の面積が常に1であるとき, PQの中点Rが描く図形の方程式を求めよ.

(2)　2次関数 $y=x^2$ のグラフを Γ とする. $b<a^2$ を満たす点 $\mathrm{P}(a, b)$ から Γ へ接線を2本引き, 接点をA, Bとする. Γ と2本の線分PA, PBで囲まれた図形の面積が $\frac{2}{3}$ になるような点Pの軌跡を求めよ.

【選択肢】

(1)　㋐　$y=x^2-\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$　　㋑　$y=x^2+\frac{3}{4}$　　㋒　$y=x^2+\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$

(2)　㋐　放物線 $y=x^2-1$　　㋑　放物線 $y=x^2+1$　　㋒　放物線 $y=x^2-\frac{1}{4}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　２次の面積の計算

15 次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c，d，p，q，α，β は実数の定数とし，$\alpha<\beta$ とする．

(1) 曲線 $C_1 : y=2x^2+3x+4$ と直線 $l_1 : y=ax+b$ が 2 点で交わっていて，その x 座標が $x=5$，7 であるとき，C_1 と l_1 で囲まれる部分の面積 S_1 を求めよ．

(2) 曲線 $C_2 : y=5x^2+6x+7$ と直線 $l_2 : y=cx+d$ が 1 点で接していて，その x 座標が $x=3$ であるとき，C_2 と l_2，そして直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積 S_2 を求めよ．

(3) 曲線 $C : y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ に対し，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C に 2 本の接線が引けるとする．その接線を l，m とし，C と l の接点を $\mathrm{Q}(\alpha,\ a\alpha^2+b\alpha+c)$，$C$ と m の接点を $\mathrm{R}(\beta,\ a\beta^2+b\beta+c)$ とする．曲線 C と線分 QR で囲まれる部分の面積 S を a，α，β で表せ．また，C と l と m で囲まれる部分の面積 T を a，α，β で表せ．

【答】 (1) $S_1=\dfrac{8}{3}$　(2) $S_2=\dfrac{40}{3}$　(3) $S=\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$，$T=\dfrac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$

【解答】

(1)
$$S_1=\int_5^7\{(ax+b)-(2x^2+3x+4)\}dx$$
$$=\int_5^7(-2)(x-5)(x-7)dx$$
$$=-\frac{-2}{6}(7-5)^3=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

(2)
$$S_2=\int_3^5\{(5x^2+6x+7)-(cx+d)\}dx$$
$$=\int_3^5 5(x-3)^2dx$$
$$=\left[\frac{5}{3}(x-3)^3\right]_3^5=\mathbf{\frac{40}{3}}$$

(3) $y=ax^2+bx+c$ より $y'=2ax+b$ となるので，Q における接線は

$y=(2a\alpha+b)(x-\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$

よって　$l : y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c$

同様にして　$m : y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$

ここで l と m を連立することにより $p=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を得る．

また，Q と R を通る直線の傾きは

$$\frac{(a\beta^2+b\beta+c)-(a\alpha^2+b\alpha+c)}{\beta-\alpha}=a(\alpha+\beta)+b$$

より

$$\text{直線 QR} : y=\{a(\alpha+\beta)+b\}(x-\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$$
$$y=\{a(\alpha+\beta)+b\}x-a\alpha\beta+c$$

となるので

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}[\{a(\alpha+\beta)+b\}x-a\alpha\beta+c-(ax^2+bx+c)]dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(-a)(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

また

$$T=\int_{\alpha}^{p}[(ax^2+bx+c)-\{(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c\}]dx$$

$$+\int_{p}^{\beta}[(ax^2+bx+c)-\{(2a\beta+b)x-a\beta^2+c\}]dx$$

$$=\int_{\alpha}^{p}a(x-\alpha)^2dx+\int_{p}^{\beta}a(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{p}+\left[\frac{a}{3}(x-\beta)^3\right]_{p}^{\beta}$$

$$=\frac{a}{3}(p-\alpha)^3+\frac{a}{3}(\beta-p)^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　2次の面積の計算

15　次の各問いに答えよ．

(1)　放物線 $y=x^2$ の上を動く2点P，Qがあって，この放物線と線分PQが囲む部分の面積が常に1であるとき，PQの中点Rが描く図形の方程式を求めよ．

(2)　2次関数 $y=x^2$ のグラフを Γ とする．$b<a^2$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から Γ へ接線を2本引き，接点をA，Bとする．Γ と2本の線分PA，PBで囲まれた図形の面積が $\dfrac{2}{3}$ になるような点Pの軌跡を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$y=x^2-\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$　　㋑　$y=x^2+\dfrac{3}{4}$　　㋒　$y=x^2+\sqrt[3]{\dfrac{9}{16}}$

(2)　㋐　放物線 $y=x^2-1$　　㋑　放物線 $y=x^2+1$　　㋒　放物線 $y=x^2-\dfrac{1}{4}$

【答】　(1) ㋒　(2) ㋐

【解答】

(1)　$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とおき，直線PQを表す式を $y=l(x)$ とおくと

$$1=\int_\alpha^\beta\{l(x)-x^2\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta\{-(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$\therefore\quad(\beta-\alpha)^3=6\quad\cdots\cdots①$$

ここで $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{cases}X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\\ Y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\end{cases}\quad\text{であるから}\quad\begin{cases}\alpha+\beta=2X\\(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2Y\end{cases}$$

$$\therefore\quad\begin{cases}\alpha+\beta=2X\\ \alpha\beta=2X^2-Y\end{cases}$$

これを，①すなわち

$$\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=6$$

へ代入すると

$$\{(2X)^2-4(2X^2-Y)\}^{\frac{3}{2}}=6$$
$$\{4Y-4X^2\}^{\frac{3}{2}}=6$$
$$\therefore\quad Y=X^2+\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$$

よって，求める図形の方程式は

$$\boldsymbol{y=x^2+\sqrt[3]{\frac{9}{16}}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ とおくと，$y'=2x$ より点 A における接線は

$$y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$$

$$\therefore\quad y=2\alpha x-\alpha^2$$

この直線が点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るので

$$b=2\alpha\cdot a-\alpha^2$$

$$\alpha^2-2a\alpha+b=0$$

$$\therefore\quad \alpha=a\pm\sqrt{a^2-b}$$

ここで $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，同様に $\beta=a\pm\sqrt{a^2-b}$ を得るが，$\alpha<\beta$ より

$$\alpha=a-\sqrt{a^2-b},\qquad \beta=a+\sqrt{a^2-b}$$

となる．接点 A と B における 2 接線の交点の x 座標は

$$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2 \text{ より }\quad 2(\beta-\alpha)x=\beta^2-\alpha^2 \quad\text{よって}\quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}&=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx\\&=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\\&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

これより $(\beta-\alpha)^3=8$，また $\beta-\alpha$ は実数より $\beta-\alpha=2$

したがって　$2\sqrt{a^2-b}=2$　　$\therefore\quad a^2-b=1$

よって求める軌跡は

放物線 $y=x^2-1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。